Colles ECG 2 - Maths Appliqués

Bastien Lecluse

26 juin 2024

Ce document regroupe les exercices que j'ai pu donner en colle en classe préparatoire ECG2 maths appliqués lors de l'année scolaire 2023-2024, à l'E.N.C Bessières. Ces exercices sont issus de réflexions personnelles, de livres, de recherches sur internet, mais aussi et surtout du travail de Frédéric Gaunard, que je remercie grandement. Des erreurs se sont certainement glissées dans ce polycopié, n'hésitez pas à m'en faire part.

Table des matières

Première partie
Probabilités

1 Probabilités d'évènements

Exercice 1

Montrer que, si C et D sont deux évènements d'un même espace probabilisé, alors

$$\mathbb{P}(C \cup D) \leqslant \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D).$$

En déduire que, si (A_j) est une suite d'évènements du même espace, alors, pour tout $n \in \mathrm{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \geqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Exercice 2

On se donne deux dés non truqués à 6 faces, l'un est bleu et l'autre est rouge. Considérons les évènements

$$\begin{aligned} A &= \{ \text{ le résultat du dé rouge est impair } \} \\ B &= \{ \text{ le résultat du dé bleu est impair } \} \\ C &= \{ \text{ la somme des deux dés est impaire } \}. \end{aligned}$$

1. Montrez que les évènements sont deux à deux indépendants.
2. Les évènements sont-ils mutuellement indépendants ?

2 Variables aléatoires

2.1 Lois usuelles

Exercice 3

Donner la définition, l'interprétation, l'espérance et la variance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Écrire une fonction python simulant cette loi à partir de la commande **np.rand**().

Exercice 4

Donner la définition, l'interprétation, l'espérance et la variance d'une loi géométrique $\mathcal{G}(n,p)$. Écrire une fonction python simulant cette loi à partir de la commande **np.rand**().

Exercice 5

Donner la définition, l'interprétation, l'espérance et la variance d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Écrire une fonction python simulant cette loi à partir de la commande **np.rand**().

Exercice 6

Soit $0 < p < 1$, et soit X une variable aléatoire discrète sur $\mathbb{N}^*$ suivant une loi géométrique de paramètre p.

1. Montrer que
$$\forall\, n,k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X > n+k \,|\, X > k) = \mathbb{P}(X > n).$$
Une telle loi est dite sans mémoire.
2. Montrer que la seule loi discrète sans mémoire est la loi géométrique.

Exercice 7

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et Y suit une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$.

1. Quelle est la loi de $X + Y$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = n$.

Exercice 8

Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. Montrer que $\min(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - (1 - p)^2)$.
Indication : Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont dites *indépendantes* si et seulement si pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = P(X = i)P(Y = j).$$

On commencera par calculer $P(X \geqslant k)$, puis, notant $Z = \min(X, Y)$, $P(Z \geqslant k)$ et on utilisera le fait que,

$$P(Z = k) = P(Z \geqslant k) - P(Z \geqslant k + 1).$$

Exercice 9

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. La valeur renvoyée par X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ? Quelle réponse élémentaire aurait-on pu proposer si $p = 1/2$?

2.2 Modélisation

Exercice 10

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher (r et b sont deux entiers naturels dont au moins un est non nul). On tire au hasard une boule dans l'urne. Si elle est blanche, on arrête. Si elle est rouge, on la remplace dans l'urne par une boule blanche, et on répète le protocole de tirage jusqu'à obtention d'une boule blanche. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. On suppose dans cette question seulement que $b = 2$ et $r = 3$.
   (a) Modéliser cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré.
   (b) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   (c) Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance $\mathbb{E}[X]$. Interpréter la valeur de $\mathbb{E}[X]$.
2. (a) Que simule la fonction Python suivante ?

```
def tirage(r,b):
```

```
        d=random.randint(1,r+b)
        if d>b:
            return 1
        else:
            return 0
```

(b) Écrire une fonction **simulX(r,b)** qui simule la variable aléatoire X (on pourra utiliser la fonction précédente).

(c) Faire un diagramme à bâtons de la variable X pour un échantillon de taille 1000.

3. (a) On se place toujours dans le cas général, et on note pour tout entier $n > 0$, A_n l'événement "la n-ième boule tirée est rouge". Donner l'ensemble Ω des valeurs prises par X et, pour $k \in \Omega$, exprimer l'événement $(X = k)$ en fonction d'événements liés aux événements $A_1, \dots, A_k$.

(b) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 11

Soit $p \in]0; 1[$. On dispose d'une pièce de monnaie qui amène *Pile* avec la probabilité p, et *Face* avec la probabilité $1 - p$. On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la seconde fois *Pile*. On note X la variable aléatoire égale au nombre de *Face* obtenus au cours des lancers.

1. (a) Déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(X = 1)$.

(b) Plus généralement, déterminer la loi de la variable aléatoire X.

(c) Vérifier que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1.$$

2. Que peut-on dire de l'événement " on n'obtient jamais deux *Pile* au cours d'une infinité de lancers de la pièce " ?

3. Montrer que la variable X admet une espérance et la calculer.

4. Compléter le code Python ci-dessous afin qu'il affiche une réalisation de la variable X

```
def simul_X(p):
    n_pile=0
    n_lancers=1
    while .... :
        if  .... :
            ...
            ...
    return ...
```

Exercice 12

À un péage autoroutier n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.

1. Déterminer la loi de X_1, écrire une fonction python simulant X_1.
2. Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2.

Exercice 13

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce ayant la probabilité $p \in]0,1[$ de tomber côté Pile. On note X la longueur de la première série de lancers identiques et Y la longueur de la seconde série. Par exemple, les successions de lancers PPFFFP... et FFPPPF... correspondent à $X = 2$ et $Y = 3$.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y). La simuler avec une fonction python.
2. Calculer les espérances de X et Y et comparer celles-ci.

2.3 Complément

Exercice 14

Soit $n \geqslant 1$. Considérons une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi vérifiant

$$\forall k \geqslant 1, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{n^{k-1}}{(n+1)^{k+1}}.$$

Déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$.

Exercice 15

Soit X une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > j).$$

Exercice 16

1. On rappelle que la commande Python **np.prod(liste)** renvoie le produit des composantes de la liste prise en argument. Écrire une fonction Python d'en-tête def **c_ bin(n,k) :** qui prend en argument deux entiers naturels n et k et renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
2. Soient m, n deux entiers naturels non nuls et p un autre entier naturel tel que $p \leqslant m$ et $p \leqslant n$. Justifier, à l'aide d'un argument de dénombrement, que
$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}. \qquad (\star)$$
3. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on définit $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ par la formule, pour $k \in [\![0, p]\!]$,
$$\mathbb{P}(Z = k) = \frac{\binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k}}{\binom{n}{p}}.$$
À l'aide de la formule $(\star)$, vérifier que Z définit bien une variable aléatoire. Une telle variable est dite *hypergéométrique* et on notera
$$Z \hookrightarrow \mathcal{H}\left(p, \frac{p}{n}, n\right).$$
4. (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a :
$$k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}.$$
   (b) En déduire, toujours à l'aide de $(\star)$, que
$$\mathbb{E}[Z] = \frac{p}{\binom{n}{p}} \sum_{k=1}^{p} \binom{p-1}{k-1}\binom{n-p}{p-1-(k-1)} = \frac{p^2}{n}.$$

Exercice 17

1. Rappeler la définition d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.
2. Soit F une fonction de répartition. On appelle fonction de quantile la fonction
$$F^{\leftarrow} : \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \inf\{x : F(x) > u\}. \end{array} \right.$$

Montrer que si U est de loi uniforme sur $]0,1[$, alors $F^{\leftarrow}(U)$ a pour fonction de répartition F.

3. Simuler, à partir d'une loi uniforme sur $[0,1]$, une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 (ie une variable aléatoire de densité $f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$).

Exercice 18

Soit $s > 1$. Soit X une variable aléatoire à valeurs entières, de loi définie par

$$\forall n \geqslant 1, \mathbb{P}(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$$

où $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$. On note $(p_k)_{k\geqslant 1}$ la suite croissante des nombres premiers. Notons enfin A_k l'évènement "X est divisible par p_k".

1. Calculer $\mathbb{P}(A_k)$ et étudier l'indépendance des A_k.
2. En déduire l'identité d'Euler

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

Exercice 19

Soit X, Y deux variables aléatoires à valeurs aléatoires dans $\mathbb{N}^*$ telles que

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) > 0$,
- pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k|Y = n) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } k \leqslant n, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. (a) Soit U, V, W des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que pour tous entiers $k, n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(W = n) > 0$ et $\mathbb{P}(U = k|W = n) = \mathbb{P}(V = k|W = n)$. Montrer que U et V suivent la même loi.
   (b) Monter que les variables aléatoires X et $Y + 1 - X$ suivent la même loi.
2. Supposons que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer que les variables aléatoires X et $Y + 1 - X$ sont indépendantes.

Exercice 20

On considère, dans cet exercice, deux variables aléatoires X et Y (définies sur le même espace probabilisé qu'on ne précise pas ici) à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose, pour tout l'exercice, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) > 0$ et que la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$.

1. Établir que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} P_{[X=n]}(Y = k)P(X = n)$.
2. Montrer, sans déterminer explicitement leurs lois, que $X - Y$ et Y suivent la même loi.
3. À l'aide de la Question (1), montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P(Y = k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n)$.
4. On suppose, dans cette question que $Z = Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.
   (a) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k) - P(Y = k + 1)$.
   (b) En déduire la loi de X.
   (c) Vérifier que X admet bien une espérance et la calculer.
   (d) Montrer que $X - Y$ et Y sont indépendantes.
   (e) En déduire la valeur de $\mathrm{cov}(X, Y)$.

3 Couples de variables aléatoires

Exercice 21

On tire simultanément deux boules dans une urne contenant 4 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 4. On note U le numéro de la plus petite boule, et V le numéro de la plus grande boule. Déterminer la loi conjointe de (U, V), puis les lois de U et de V.

Exercice 22

On dispose de n boites numérotées de 1 à n. La boite k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard de façon équiprobable une boite, puis une boule dans cette boite. On note X le numéro de la boite et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. En déduire la loi de Y.
3. Calculer l'espérance de Y.

Exercice 23

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\{0, \ldots, n\}^2$.

1. Déterminer la loi de X, la loi de Y, la loi de $X + Y$.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 24

Soit $p \in]0, 1[$ et $\lambda > 0$. On considère deux variables aléatoires X, Y indépendantes telles que X suit une loi géométrique de paramètre p et Y suit une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer $\mathbb{P}(X > Y)$.

Exercice 25

Soit un entier $n \geqslant 1$, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On considère $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Déterminer la loi du couple (X_1, S_n).
2. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $S_n = k$.
3. Déterminer la loi conditionnelle de S_n sachant $X_1 = i$.

Exercice 26

Soit X, Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé à valeurs dans $\{0,1\}$. La loi du couple (X,Y) est donnée par le tableau suivant, où a, b sont des réels.

(x,y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$\mathbb{P}(X=x, Y=y)$	$\frac{1}{2}-a$	$a+\frac{1}{3}$	b	$\frac{1}{6}-2a$

1. Quelles sont les valeurs autorisées pour a et b ?
2. Calculer, en fonction de a et b, les lois marginales de X et de Y.
3. Quelles valeurs de a et b correspondent à un couple (X,Y) de variables indépendantes ?

Exercice 27

Deux archers tirent indépendamment sur n cibles. À chaque tir, le premier archer a la probabilité p de toucher, le second la probabilité q. On introduit les variables aléatoires suivantes :

— X_i, qui vaut 1 si le **premier** archer touche la i-ième cible, 0 sinon.
— Y_i, qui vaut 1 si le **second** archer touche la i-ième cible, 0 sinon.
— $Z_i = \max(X_i, Y_i)$.

1. Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètres p et q. Déterminer la loi de la variable $W = \max(U, V)$.
2. Que modélise la variable aléatoire Z_i ?
3. Quelle est la loi suivie par le nombre de cibles touchées au moins une fois ?
4. Quelle est la loi suivie par le nombre de cibles épargnées ?

Exercice 28

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{BN}(1,p)$. On pose $U = \max(X,Y)$ et $V = \min(X,Y)$.

1. Montrer que la loi du couple (U,V) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P([U=i] \cap [V=j]) = \begin{cases} 2p^2 q^{i+j}, & \text{si } i > j \\ 0, & \text{si } i < j \\ p^2 q^{2i}, & \text{si } i = j \end{cases}$$

2. (a) Montrer que : $\forall j \in \mathbb{N},\ P([V=j]) = \sum_{i=j}^{+\infty} P([U=i] \cap [V=j])$.

   (b) En déduire que : $\forall j \in \mathbb{N},\ P([V=j]) = p\,(1+q)\,q^{2j}$.

   (c) En déduire que V suit la loi $\mathcal{BN}\left(1, \left(1-q^2\right)\right)$.

   (d) En déduire que V admet une espérance et que $E(V) = \dfrac{q^2}{1-q^2}$.

3. (a) Justifier que $U + V = X + Y$.

   (b) En déduire que U admet une espérance et expliquer (sans faire les calculs) comment on pourrait obtenir sa valeur.

4 Variables à densité

Exercice 29

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$.

1. Donner la densité de X.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Déterminer l'espérance de X.
4. Déterminer la variance de X.

Exercice 30

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Donner la densité de X.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Déterminer l'espérance de X.
4. Déterminer la variance de X.

Exercice 31

Dire si les fonctions suivantes définissent des densités. Si oui, calculer leur fonction de répartition et dire si les variables associés admettent une espérance.

1. $f(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1-x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^3} & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 32

Soit $p > 1$. On pose

$$f(x) = \begin{cases} \frac{p-1}{x^p} \text{ si } x \geqslant 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Monter que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f.
   (a) Dans quel cas X admet une espérance ? La calculer.
   (b) Dans quel cas X admet une variance ? La calculer.

Exercice 33

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{a}{x\sqrt{x}}$ si $x \geqslant 1$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition associée à X.
3. X admet-elle une espérance ? Si oui, la déterminer.

Exercice 34

On considère une variable aléatoire X dont la densité est donnée par

$$f(x) = ce^{-|x|}.$$

1. Calculer c.
2. Démontrer que X admet des moments de tout ordre. Les calculer.

Exercice 35

Soient m, σ deux réels. On dit que X suit une loi log-normale de paramètres (m, σ) si $Y = \ln X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. On supposera dans la suite que $m = 0$ et $\sigma = 1$.

1. Exprimer la fonction de répartition de X à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.
2. Calculer sa densité.

3. Montrer que $E(X) = \sqrt{e}$. On donne $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 36

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$.

1. Démontrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X. On note F sa fonction de répartition.
2. On considère la variable aléatoire $Y = \ln(1 + |X|)$ et on note G sa fonction de répartition. Exprimer F en fonction G.
3. En déduire que Y admet une densité que l'on calculera.
4. Reconnaître la loi de Y.

Exercice 37

On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

1. Montrer, à l'aide du changement de variable $u = 1 + e^{-x}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t$ et préciser sa valeur.
2. En déduire que f peut être considérée comme une densité de probabilité. Dans la suite de, on note X une variable aléatoire ayant f pour densité.
3. Donner l'expression de la fonction de répartition F_X de X.
4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = 1 - F_X(-x)$. Quelle loi usuelle du cours admet une fonction de répartition vérifiant la même propriété ?
5. Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
   (a) Justifier que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations, limites comprises.
   (b) Montrer que ϕ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J à préciser et déterminer l'expression de sa bijection réciproque ϕ^{-1}.
   (c) On définit la variable aléatoire Y par $Y = \phi(X)$. Montrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-1;1])$.
   (d) Montrer que si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$, alors $2U - 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([-1;1])$.
   (e) En déduire l'écriture d'une fonction Python d'en-tête **def simulX( ) :** qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

Exercice 38

Soient S_1 et S_2 deux variables aléatoires indépendantes, et suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $T_1 = \lfloor S_1 \rfloor$ la partie entière de S_1 et $T_2 = \lfloor S_2 \rfloor$ la partie entière de S_2. On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (T_1 = k) = (k \leqslant S_1 < k+1) \quad \text{et} \quad (T_2 = k) = (k \leqslant S_2 < k+1).$$

1. (a) Rappeler l'expression de la fonction de répartition de S_1.
   (b) Calculer $P(T_1 = k)$, pour $k \in \mathbb{N}$, et en déduire que T_1 suit la loi $\mathcal{BN}(1, p_\lambda)$ où $p_\lambda = 1 - e^{-\lambda}$.
   On remarquera que T_2 suit la même loi que T_1.
2. (a) Justifier que T_1 et T_2 sont indépendantes.
   (b) On note $q_\lambda = 1 - p_\lambda$. Montrer que : $P(T_1 = T_2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_\lambda^2 q_\lambda^{2k}$.
   (c) Calculer alors $P(T_1 = T_2)$ en fonction de p_λ et q_λ puis vérifier que $P(T_1 = T_2) = \dfrac{1 - e^{-\lambda}}{1 + e^{-\lambda}}$.

5 Chaînes de Markov

Exercice 39

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, et soit $X_n = \sum_{k=0}^{n} Y_n$. On suppose que pour tous $i_0, \ldots, i_n \in \mathbb{Z}^d$ on a $P(\cap_{j=O}^{n-1}\{X_j = i_j\}) > 0$.
Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.

Exercice 40

Un individu se déplace sur les trois points A_0 d'abscisse 0, A_1 d'abscisse 1 et A_2 d'abscisse 2 selon les règles suivantes :

- À l'instant initial 0, il est au point d'abscisse 2.
- S'il est au point d'abscisse 2 à l'instant n, il est de façon équiprobable en l'un des trois points d'abscisse 0, 1 et 2 à l'instant $n+1$.
- S'il est au point d'abscisse 1 à l'instant n, il est de façon équiprobable en l'un des 2 points d'abscisse 0 ou 1 à l'instant $n+1$.
- S'il est au point d'abscisse 0 à l'instant n, il reste au point d'abscisse 0 à l'instant $n+1$.

Pour tout entier naturel n, on désigne par X_n la variable aléatoire indiquant l'abscisse du point où se trouve l'individu à l'instant n. On définit ainsi une chaîne de Markov $(X_n)_n \in \mathbb{N}$. On note $U_n = P(X_n = 0)P(X_n = 1)P(X_n = 2))$ le n-ième état probabiliste de cette chaîne.

1. (a) Donner la matrice de transition M et le graphe probabiliste associés à $(X_n)_n \in \mathbb{N}$.
   (b) Quel est l'unique état stable U possible pour cette chaîne de Markov ?
2. (a) Diagonaliser la matrice M.
   (b) Déterminer les coefficients de M^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n M$.
   (b) Préciser U_0 et montrer que pour tout entier n, $U_n = U_0 \times M^n$.
   (c) En déduire $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$ en fonction de n et vérifier que U_n converge bien vers l'état stable U.
   (d) Déterminer l'espérance $E(X_n)$ en fonction de n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.
4. (a) En multipliant à droite par la matrice colonne l'égalité matricielle $U_{n+1} = U_n M$, exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$.
   (b) Retrouver l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.
5. Écrire un programme python simulant la situation.

Exercice 41

Soit a un réel fixé, élément de $]0;1/2[$.
Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable, ou baisser. Dans un modèle mathématique, on considère que :

- le premier jour, le titre est stable ;
- si le jour n le titre monte, alors il montera également le jour $n+1$ avec probabilité $1-2a$, restera stable avec probabilité a et baissera avec probabilité a ;
- si le jour n le titre est stable, alors il restera stable le jour $n+1$ avec probabilité $1-2a$, montera avec probabilité a et baissera avec probabilité a ;
- si le jour n le titre baisse, alors il baissera encore le jour $n+1$ avec probabilité $1-2a$, restera stable avec probabilité a et montera avec probabilité a.

On note M_n (resp. S_n, B_n) l'évènement "le titre donné monte le jour n" (resp. "est stable le jour n", "baisse le jour n") et m_n (resp. s_n, b_n) la probabilité correspondante.

1. On note $X_k = (m_k \quad s_k \quad b_k)$, pour $k \in \mathbb{N}$. Justifier que $(X_k)_k$ est un chaîne de Markov. Donner le graphe et la matrice associée.
2. Écrire une fonction python de paramètres (a,k) renvoyant X_k.
3. Exprimer m_{n+1} en fonction de m_n, s_n et b_n. Même question avec s_{n+1}.
4. Que vaut $m_n + s_n + b_n$? En déduire l'expression de b_n en fonction de m_n et s_n.
5. Montrer que les suites (m_n) et (s_n) sont arithmético-géométriques.
6. En déduire l'expression du terme général de chacune des trois suites et déterminer leurs limites. Interpréter.

Exercice 42

EDHEC 2010.
Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant. On définit une suite de variables aléatoires (X_k), $k \in \mathbb{N}^*$ de la manière suivante.

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie après le k-ème tirage.
- On procède au 1er tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.

— Après le k-ème tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :
  — soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)$-ème tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)$-ème tirage.
  — soit X_k a pris la valeur j, différente de 1. Dans ce cas on procède également au $(k+1)$-ème tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

1. Reconnaître la loi de X_1.
2. On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la i-ème ligne

est $P(X_k = i)$.

(a) Déterminer les probabilités $P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$ pour tout couple $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$.

(b) On admet que $(\{X_k = 1\}, \{X_k = 2\}, \{X_k = 3\})$ est un système complet d'évènements. Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = AU_k$.

(c) Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$ alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k = AU_0$.

(d) Vérifier que $A = M + \frac{1}{3}I_3$, puis établir que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$.

(e) En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k. En déduire la loi de X_k.

(f) Montrer que la suite $(X_k)_k$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on donnera la loi.

(g) Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k.

6 Inégalités de concentration, convergences de variables aléatoires

Exercice 43

Soit X une variable aléatoire réelle.

1. Montrer que pour toute fonction croissante $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$,
$$\forall a > 0, \quad P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(f(|X|))}{f(a)}.$$
2. Supposons de plus que X est à valeurs positives et que pour tout $t > 0$, la variable etX admet une espérance. Montrer que
$$\forall a > 0, \forall t > 0, \quad P(X \geqslant a) \leqslant e^{-ta}\mathrm{E}(e^{tX}).$$

Exercice 44

Soit X une VA suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Montrer que pour tout $a > 0$,
$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{a^2 n}.$$

Exercice 45

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, centrées. Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n^2) \leqslant M$.
Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$
$$P(|X_1 + \ldots + X_n| \geqslant n\varepsilon) \longrightarrow 0.$$

Exercice 46

1. Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois de Poisson de paramètres α et β. Montrer que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha + \beta$.
2. En appliquant le théorème limite central à une suite de variables aléatoires indé-

pendantes (X_n) suivant toutes une loi de Poisson de paramètre 1, montrer que

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Exercice 47

Soit (X_n) une suite de VA telle que X_n suit une loi binomiale de paramètres $(1-\frac{1}{n})^n$. Montrer que X_n converge en loi vers Z, où $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(e^{-1})$.

Exercice 48

On considère une suite $(X_1,\dots,X_n)$ de v.a indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Z_n = \max(X_1,\dots,X_n) - ln(n)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Z_n.
2. On pose $Z = -ln(X)$ où$X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Z.
   (b) Montrer que (Z_n) converge en loi vers Z.

Exercice 49

Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. On note $M_n = \max(U_1,\dots,U_n)$ et $X_n = n(1-M_n)$.

1. Quelle est la fonction de répartition de X_n ?
2. Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).

7 Statistique

7.1 Estimations ponctuelles

Exercice 50

Soient a, b deux réels et x une série statistique. Exprimer en fonction de la moyenne de x, la moyenne de la série $x' := ax + b$. Faire de même avec la médiane.

Exercice 51

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On étudie deux variables statistiques quantitatives x et r. On souhaite expliquer la dépendance de r par rapport à x à l'aide d'une relation exponentielle de la forme :

$$r = ae^{-cx} \tag{$\star$}$$

où a et c sont des réels que l'on cherche à déterminer, avec $a > 0$. On dispose pour cela de deux séries statistiques $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ représentant des mesures des variables x et r respectivement.

1. On pose $y = \ln r$. Montrer que les variables x et r vérifient la relation $(\star)$ si et seulement si x et y vérifient une relation de la forme :
$$y = \alpha x + \beta,$$
où α et β sont des paramètres réels que l'on exprimera en fonction de a et c. On rappelle que la droite de régression linéaire de $y = (y_1, \ldots, y_n)$ par rapport à $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a pour équation :
$$y = \frac{s_{x,y}}{s_x^2}(x - \overline{x}) + \overline{y},$$
où :
   - $s_{x,y}$ désigne la covariance empirique de la série statistique double (x, y) ;
   - $\overline{x}$ et $\overline{y}$ désignent les moyennes des séries statistiques x et y respectivement ;
   - s_x^2 désigne la variance de la série statistique x.
2. Rappeler les formules mathématiques définissant $\overline{x}$, s_x^2 et $s_{x,y}$ en fonction de n, $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$. Rappeler les formules de Koenig et de Koenig-Huygens permettant de reformuler s_x^2 et $s_{x,y}$.
3. Exprimer a et c en fonction $\overline{x}$, $\overline{y}$, s_x^2 et $s_{x,y}$.
4. Recopier et compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie la covariance empirique des séries statistiques x et y fournies en argument d'entrée sous forme de tableaux Numpy à une dimension.

```
import numpy as np
def covariance (x,y):
        prod = x*y
        return ..........
```

5. Recopier et compléter la fonction suivante, prenant en arguments d'entrée les séries statistiques $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ (sous forme de tableaux Numpy à une dimension x et r respectivement), pour qu'elle renvoie des valeurs approchées des paramètres a et c qui interviennent dans la relation $(\star)$.

```
import numpy as np
def ajustement_exp (x,r):
        y = np.log(r)
        moy_x = np.mean(x)
        moy_y = np.mean(y)
        cov_xy = covariance(x,y)
        var_x = .......... # variance de x
        c = ..........
        a = ..........
        return a,c
```

Exercice 52

Déterminer l'expression de l'estimateur de maximum de vraisemblance d'une loi de Poisson de paramètres $\lambda > 0$.

Exercice 53

Déterminer l'expression de l'estimateur de maximum de vraisemblance d'une loi géométrique de paramètres $p \in]0, 1[$.

Exercice 54

On dispose d'un n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre λ avec λ inconnu. On cherche à estimer la probabilité $e^{-q\lambda}$ de n'observer que des 0 au cours de q expériences consécutives. On pose $T_n = e^{-q\overline{X_n}}$. T_n est-il un estimateur sans biais de $e^{-q\lambda}$? Que dire lorsque n est grand ? T_n est-il convergent ?

Exercice 55

Soit T_n un estimateur de $g(\theta)$. On suppose que pour tout $\theta \in \Theta$, T_n admet un moment d'ordre 2 pour la probabilité P_θ. Pour tout $\theta \in \Theta$, on appelle risque quadratique de T_n (en $g(\theta)$) et on note $r\theta(T_n)$ le réel :

$$r_\theta(T_n) = E_\theta\left[(T_n - g(\theta))^2\right].$$

Il représente la « dispersion moyenne » de T_n par rapport à $g(\theta)$.

1. Montrer que $r_\theta(T_n) = [E_\theta(T_n) - g(\theta)]^2 + V_\theta(T_n)$.
2. On suppose que pour tout $\theta \in \Theta$, $\lim_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0$. Montrer que T_n est un estimateur convergent de $g(\theta)$.
3. Soient T_n et U_n deux estimateurs de $g(\theta)$ tels que $r_\theta(T_n) < r_\theta(Un)$ pour tout $\theta \in \Theta$. Lequel de ces deux estimateurs doit-on privilégier ? Pourquoi ?
4. (a) **Exemple 1.** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Comparer X_n et T_n en tant qu'estimateurs de $\frac{1}{\lambda}$.

(b) **Exemple 2.** On cherche à estimer le paramètre p d'une loi de Bernoulli. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon d'une loi de Bernoulli de paramètre p. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. On pose

$$\overline{X_n} = \frac{S_n}{n} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n + 1}{n+2}.$$

Comparer X_n et T_n en tant qu'estimateurs de p (on étudiera les cas où p est proche de 1 et de 1/2). Peut-on privilégier l'un de ces estimateurs par rapport à l'autre ?

7.2 Intervalles de confiance

Exercice 56

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi normale d'espérance θ inconnue et de variance σ^2 connue. On pose $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

1. Quelle est la loi de $\overline{X_n}$?
2. Soit $\alpha \in]0,1[$, et soit t_α l'unique réel tel que $\Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. Montrer que $\left[\overline{X_n} - \frac{t_\alpha\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + \frac{t_\alpha\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance

$1-\alpha$.

Exercice 57

Soient $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ inconnu. On pose alors $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$, et on considère $\alpha \in]0,1[$.

1. Montrer que M_n suit une loi exponentielle dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer deux réels a_n et b_n tels que $P(n\lambda M_n \leqslant a_n) = \frac{\alpha}{2} = P(n\lambda M_n \geqslant b_n)$.
3. En déduire que $\left[\frac{nM_n}{b_n}, \frac{nM_n}{a_n}\right]$ est un intervalle de confiance de $\frac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1-\alpha$.

Deuxième partie
Algèbre linéaire

8 Calcul matriciel, inversion

Exercice 58

Déterminer **soigneusement**, par la formule du binôme, les puissances A^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 59

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2 et $A3$. Conjecturer une expression pour A^n, pour $n \geqslant 1$. La démontrer. Mêmes questions pour la matrice B.

Exercice 60

On considère la matrice A ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. À l'aide du pivot de Gauss, vérifier que A est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $A^2 - 4A + 3I$. En déduire une nouvelle preuve que A est inversible et donner une expression de A^{-1} en fonction de A et de I.

Exercice 61

Dire si les matrices suivantes sont inversibles, et si c'est le cas calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 62

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *nilpotente*, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

1. Calculer $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + ... + A^{p-1})$.
2. En déduire que $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

Exercice 63

Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $B^2 + B$ et déduire que B n'est pas inversible.

Exercice 64

Résoudre le système suivant $\left\{ \begin{array}{rcr} x + y - 3z - t & = & 0 \\ 2x + y - 5z + 4t & = & 4 \\ x - 2y + 3t & = & -2 \\ -x + y + z - 2t & = & 1 \end{array} \right.$

9 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Exercice 65

Résoudre les équations $AX = 0$, $AX = X$ et $AX = 3X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où A est la matrice ci-dessous.
On présentera les solutions sous forme de *sous- espace vectoriel (de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) engendré* par une famille (finie) de vecteurs.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 66

Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel

$$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \right).$$

Exercice 67

Montrer que la famille de vecteurs ci-dessous forme une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 68

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer $(A - 3I)^2$.

(b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. On note $F = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = 3u\}$.

(a) En résolvant l'équation $AX = 3X$ d'inconnue X, montrer qu'il existe u_1 et u_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera tels que $F = Vect(u_1, u_2)$.

(b) La famille (u_1, u_2) est-elle une base de F ?

Exercice 69

Écrire la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ puis celle dans la base $\mathcal{F} = \{-e_1, e_1 - e_2, -e_1 + e_2 + 4e_3\}$, où

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, -y + z, 3z).$$

Exercice 70

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z).$$

Déterminer le noyau de f, son image. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 71

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + y).$$

Déterminer le noyau de f, son image. f est-elle injective ? surjective ?

10 Réduction

Exercice 72

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Trouver trois vecteurs $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$\operatorname{Ker}(A - 2I_3) = \operatorname{Vect}(u_1), \quad \operatorname{Ker}(A - 4I_3) = \operatorname{Vect}(u_2, u_3).$$
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. On la notera D.
4. Déterminer une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$.
5. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 73

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Trouver trois vecteurs $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$\operatorname{Ker}(A + I_3) = \operatorname{Vect}(u_1), \quad \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = \operatorname{Vect}(u_2), \quad \operatorname{Ker}(A - 5I_3) = \operatorname{Vect}(u_3).$$
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. On la notera D.
4. Déterminer une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$.
5. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 74

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Trouver trois vecteurs $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que

   $$\operatorname{Ker}(A-6I_3) = \operatorname{Vect}(u_1), \quad \operatorname{Ker}(A+2I_3) = \operatorname{Vect}(u_2), \quad \operatorname{Ker}(A-2I_3) = \operatorname{Vect}(u_3).$$

2. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. On la notera D.
4. Déterminer une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$.
5. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 75

On considère deux réels a et b ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que $a = b$ alors la matrice A ne possède qu'une seule valeur propre.
   (b) En déduire, par l'absurde, que, si $a = b$, A n'est pas diagonalisable.
2. On suppose dans cette question que $a \neq b$.
   (a) Quelles sont les valeurs propres de A ? En déduire que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $AP = PD$. *On rédigera scrupuleusement cette réponse en expliquant comment sont construites les deux matrices.*
3. Soit $q \in]0;1[$. On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes (définies sur un même espace probabilisé qu'on ne précise pas ici) de même loi géométrique $\mathcal{G}(q)$.
   (a) Calculer $P(X = Y)$.
   (b) On considère la matrice aléatoire $A(X,Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.
      i. Déterminer la probabilité p que $A(X,Y)$ ne soit pas diagonalisable.
      ii. On note M la variable aléatoire qui prend la valeur de la plus grande valeur propre de $A(X,Y)$. Déterminer la loi de M. Justifier alors que M admet une espérance et déterminer sa valeur.

Exercice 76

On considère l'endomorphisme g de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Expliciter A^2 puis établir que $A^4 = I$.
   (b) En déduire les valeurs propres possibles de A. La matrice A est-elle inversible ?
   (c) Donner une base (u) de $\operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id})$. En déduire une (première) valeur propre de A.
   (d) Montrer que A n'admet pas d'autre valeur propre.
   (e) La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. (a) Quelle est la matrice de g^2 dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?
   (b) Résoudre l'équation $A^2X = -X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}$ et en déduire une base $(v; w)$ de $\operatorname{Ker}\big(g^2 + \mathrm{Id}\big)$.
   (c) Montrer que la famille $(u; v; w)$ forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (d) Écrire la matrice de g^2 dans la base $(u; v; w)$.
   (e) La matrice A^2 est-elle diagonalisable ?
3. On considère maintenant une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que si M est diagonalisable, alors M^2 l'est aussi. Que dire, au vu de ce qui précède, de la réciproque de cette implication ?

11 Généralisation de la notion d'espace vectoriel

Exercice 77

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Lequel de ces sous-ensembles est-il un sous-espace vectoriel ?

$$E = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} \right\}$$

$$F = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\}$$

En déterminer alors une base.

Exercice 78

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ des réels **deux à deux distincts**. Pour $k \in [\![0, n]\!]$ on pose

$$L_k(X) := \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X - \alpha_i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (\alpha_k - \alpha_i)}.$$

1. Dans cette question uniquement, on prend $n = 2$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 3$. Écrire les polynômes $L_0(X)$, $L_1(X)$ et $L_2(X)$.
2. Justifier que les polynômes $L_k(X)$, pour $k \in [\![0, n]\!]$, sont des vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Quelle est la dimension de ce dernier ?
3. Pour $i, k \in [\![0, n]\!]$, calculer la quantité $L_k(\alpha_i)$. On pourra distinguer les cas $k = i$ et $k \neq i$.
4. Montrer que la famille $(L_k(X))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ forme une famille libre de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.
5. En déduire que $(L_k(X))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Écrire la décomposition de P dans cette base.
7. **Application :** déterminer l'unique polynôme P de degré 2 qui vaut 1 en 0, 2 en 2 , et 3 en 3.

Exercice 79

Soit a, b deux réels distincts. On note F l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ dont a et b sont racines.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. On rappelle que :

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ est racine de } P \in \mathbb{R}[X] \iff X - \alpha \text{ divise P.}$$

   Déterminer une base de F. En déduire sa dimension.

Exercice 80

Soit $n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note Tr l'application qui à une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace $\operatorname{Tr}(A)$.

1. Montrer que Tr est une application linéaire.
2. On note $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \operatorname{Tr}(A) = 0\}$. Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En donner une base, et sa dimension, pour $n = 2$.

Exercice 81

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que la famille $(P^{(k)}(X))_{0 \leqslant kn}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 82

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note A^T sa transposée. On note :

— $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A^T = A\}$ l'ensemble des matrices symétriques ;
— $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A^T = -A\}$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base et la dimension de ces espaces pour $n = 3$.
3. Généraliser à n quelconque.
4. Montrer que toute matrice s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. On pourra écrire $M = A + S$, et essayer d'exprimer A et S en fonction de M uniquement.

Exercice 83

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$\left| \begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & (aX+1)P + (bX^2+c)P' \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Quelles relations doivent vérifier a, b, c afin que f soit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?
3. Calculer la matrice la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer le rang de f. On distinguera certains cas selon les valeurs des constantes a, b, c.

12 SQL

Exercice 84

Une base de données médicale contient des informations administratives sur les patients et des informations médicales. On considère deux tables : PATIENT et MEDICAL. La table PATIENT contient les attributs suivants :

- id : identifiant d'un individu (entier), clé primaire ;
- nom : nom du patient (chaîne de caractères) ;
- prenom : prénom du patient (chaîne de caractères) ;
- adresse : adresse du patient (chaîne de caractères) ;
- email (chaîne de caractères) ;
- naissance : année de naissance (entier).

La table MEDICAL contient les attributs suivants :

- id : identifiant d'un ensemble de propriétés médicales (entier), clé primaire ;
- data1 : donnée (flottant) ;
- data2 : donnée (flottant) ;
- . . . ;
- idpatient : identifiant du patient représenté par l'attribut id de la table PATIENT (entier) ;
- etat : description de l'état du patient (chaîne de caractères). Les attributs data1, data2 . . . sont des données relatives à l'analyse médicale souhaitée.

L'attribut état permet d'affecter un label à un ensemble de données médicales : "normal", "hernie discale", "spondylolisthésis".

1. Écrire une requête SQL permettant d'extraire les identifiants des patients ayant une "hernie discale".
2. Écrire une requête SQL permettant d'extraire les noms et prénoms des patients atteints de "spondylolisthésis".
3. Écrire une requête SQL permettant d'extraire chaque état et le nombre de patients pour chaque état.

Troisième partie
Analyse

13 Fonctions d'une variable réelle

Exercice 85

En utilisant des arguments de convexité, montrer que

$$\forall\, x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

On pourra commencer par faire un dessin.

Exercice 86

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x\ln(x), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Exprimer la dérivée $f'(x)$ pour $x > 0$.
3. La fonction est-elle dérivable en 0 ? Quelles en sont les conséquences graphiques ?

Exercice 87

Montrer que la fonction f définie ci-dessous est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$$\left| \begin{array}{cccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} \text{ si } x \neq 0, \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$$

On commencera par montrer que f est continue en 0. Puis, après avoir justifié que f dérivable en dehors de 0 on calculera $f'(x)$ pour $x \neq 0$. On montrera que f dérivable en 0, à l'aide du développement limité à l'ordre 2 ci-dessous

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

et enfin que f' est continue en 0.
Bonus : est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 88

Écrire un programme de dichotomie permettant de donner une valeur approchée à 10^{-4} de la solution de l'équation $e^x + x = 3$ (dont on aura au préalable rigoureusement justifié l'existence).

Exercice 89

Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow I$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in I$ un point fixe de φ (ie. $f(a) = a$). On considère la suite $(x_n)_n$ définie par

$$x_0 \in I, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, x_{n+1} = f(x_n).$$

L'objectif est d'étudier le comportement de cette suite au voisinage de a. **On suppose ici que** $|f'(a)| < 1$ (on dit que a est un point *attractif*).

1. Faire un dessin de la situation.
2. Montrer qu'il existe $k \in]0,1[$ et $h > 0$ tels que

$$\forall\, x_0 \in [a-h, a+h], \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, |x_n - a| \leqslant k^n |x_0 - a|$$

(on pourra penser à l'IAF).

3. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ si $x_0 \in [a-h, a+h]$.
4. On suppose de plus que $f'(a) = 0$, f est de classe $\mathcal{C}^2$ et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f''| \leqslant M$ sur $[a-h, a+h]$. À l'aide d'une formule de Taylor, montrer que

$$|f(x) - a| \leqslant \frac{1}{2} M |x-a|^2.$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n - a| \leqslant \frac{2}{M} \left[\frac{1}{2} M |x_0 - a| \right]^{2^n}.$$

Comparer avec la majoration précédente.

Exercice 90

Calculer les développements suivants à l'ordre 2 en 0 des quantités suivantes.

1. $\dfrac{1}{1-x} - e^x$.
2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$.
3. $(x^3+1)\sqrt{1-x}$.
4. $(\ln(1-x))^2$.

Exercice 91

Calculer les développements suivants à l'ordre 2 au point indiqué.

1. e^{x^2+x} en 0.
2. $\ln(1+e^x)$ en 0.
3. $(x+1)\sqrt{x+1} - 1$ en 0.
4. $x^2 - 2x - 1$ en 1.

Exercice 92

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}.$$

1. (a) Étudier les variations de la fonction g_0. On précisera la limite de g_0 en $+\infty$, ainsi que l'équation de la tangente en 0.
   (b) Donner l'allure de la courbe représentative de g_0.
2. (a) Pour $n \geqslant 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que, pour tout $x \geqslant 0$,
   $$g_n'(x) \geqslant 0 \iff n \geqslant 2\ln(1+x).$$
   En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geqslant 1$.
   (b) Calculer soigneusement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g_n(x)$.
   (c) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut
   $$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$
   et déterminer la limite de M_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   (d) Déterminer $\alpha > 1$ tel que, pour tout $n \geqslant 1$,
   $$g_n(x) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad x \to +\infty.$$

Exercice 93

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et $x \in [0,1]$ et $X_n = S_n/n$.
Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n. Justifier que
$$\forall\, \alpha > 0, \quad P(|X_n - x| > \alpha) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}.$$
2. On introduit la variable aléatoire $Y_n = f(X_n)$ et on pose $B_n(f)(x) = E(Y_n)$. Vérifier que $B_n(f)(x)$ est une fonction polynôme de la variable x. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue sur le segment $[0,1]$, elle y est uniformément continue (théorème de Heine). Ceci assure l'existence d'un réel $\alpha > 0$ vérifiant
$$\forall\, (x,y) \in [0,1]^2, \quad |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$
De plus, la fonction f étant continue sur un segment, elle y est bornée par un réel M.
3. Avec les notations ci-dessus, établir
$$\left| \sum_{|\frac{k}{n} - x| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P\left(X_n = \frac{k}{n} \right) \right| \leqslant \frac{M}{2n\alpha^2}$$
et
$$\left| \sum_{|\frac{k}{n} - x| \leqslant \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P\left(X_n = \frac{k}{n} \right) \right| \leqslant \varepsilon.$$
4. Conclure qu'à partir d'un certain rang, on a
$$\forall\, x \in [0,1], \quad |B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon.$$

On a démontré le théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un compact est limite uniforme d'une suite de polynômes.

14 Suites et séries

Exercice 94

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}.$$

Montrons que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, majorée, et trouver (si elle existe), sa limite.

Exercice 95

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 3, \qquad u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}.$$

On pose pour $x \neq 1$, $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_n > 1$.
3. On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$

   Déterminer v_n en fonction de n (on pourra essayer de calculer v_{n+1}).
4. En déduire une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
5. Justifier que cette dernière converge, et trouver sa limite.

Exercice 96

Soit u la suite définie par $u_0 \in]0,1]$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}.$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leqslant 1$.
2. Démontrer que la suite est monotone.
3. En déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 97

Trouver un équivalent simple aux suites $(u_n)_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$.
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.
3. $u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$.

Exercice 98

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.
3. On définit la suite $(v_n)_n$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.
   (a) Démontrer que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$.
   (c) Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$; Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 99

Soit $a > 1$ un réel fixé et la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}.$$

1. Étudier la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$.
   (On précisera son domaine de définition, ses limites aux bords du domaine et on dressera son tableau de variations.)
2. Résoudre $f(x) - x > 0$.
3. (a) Justifier que (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

(b) Écrire une fonction Python d'en-tête **def suite_u(n,a)** qui prend en argument un réel $a > 1$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ et renvoie la valeur de u_n.

(c) Montrer que (u_n) est monotone.

(d) Montrer que (u_n) converge vers une limite l à préciser.

(e) Écrire un programme Python qui calcule et affiche le plus petit entier n tel que $|l - u_n| < 0.01$.

Exercice 100

Soient f la fonction définie sur $[-2, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \geqslant 0$.

1. Montrer que $f([1,3]) \subset [1,3]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[1,3]$, notée α.
3. Montrer que pour tout $x \in [1,3]$ on a $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$
5. Conclure quant à la convergence de (u_n).
6. Écrire une fonction Python d'argument ε qui calcule et renvoie une approximation de α à ε près.

Exercice 101

Soient (a_n), (b_n), (c_n) trois suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$, et vérifiant les relations de récurrence :
$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n. \end{cases}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le but est de trouver une formule explicite pour ces trois suites.

1. On considère le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

3. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^p pour $p \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que
$$A^n = 3^n * I + 3^{n-1} n N + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$
5. Conclure.

Exercice 102

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Compléter la fonction Python ci-dessous de sorte qu'elle renvoie u_n

```
def suite_u(n):
    u = ...
    ......
        u = ...
    return ...
```

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
3. Étudier le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que sa limite.
4. On pose pour tout entier n, $v_n = \ln(u_n)$.
Calculer v_{n+1} en fonction de v_n puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}$
5. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Exercice 103

Écrire un programme permettant de calculer le terme u_n où la suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par
$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad \text{et} \quad u_{n+2} = \frac{7}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n.$$
(Écrire un programme permettant de) Représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite $(u_n/3^n)$. Déterminer ensuite l'expression du terme général de (u_n).

Exercice 104

On étudie ici la suite (H_n) de terme général

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Établir que pour $t > -1$, $\ln(1+t) \leqslant t$ et en déduire

$$\ln(1+t) \geqslant \frac{t}{t+1}.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1.$$

   En déduire un équivalent de (H_n).

3. Montrer que la suite $(u_n)_n = (H_n - \ln n)_n$ est convergente.

Exercice 105

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

(*On essaiera de faire apparaître une somme télescopique.*)

Exercice 106

Montrer la convergence et calculer la somme des séries ci-dessous

$$(i)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)^2(-2)^{n+2}}{5^n}, \qquad (ii)\ \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 107

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

(i) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n(n-1)}{6^n}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n}{(n+1)!}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2+n}{n!}$

Exercice 108

Calculer les sommes suivantes

(i) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i-j)$, (ii) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j)$, (iii) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|i-j|$, (iv) $\displaystyle\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\binom{j}{i}2^i$

(v) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)^2$, (vi) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{i}{i+j}$, (vii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(i^k)$, $(viii)$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(-1)^{i+j}$.

(et en admettant la convergence)

$$(ix)\ \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i^j}{i!j!}$$

Exercice 109

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n=\dfrac{n}{n^3+1}$
2. $u_n=ne^{-\sqrt{n}}$
3. $u_n=\dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$
4. $u_n=\dfrac{3^n+n^4}{5^n-2^n}$
5. $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
6. $u_n=a^n n!$, $a\in\mathbb{R}_+$

Exercice 110

Justifier la convergence et calculer, en cas de convergence, la somme des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}-\dfrac{2}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$
2. $u_n=\dfrac{n+1}{n!}$
3. $u_n=\dfrac{n^2-2}{n!}$

Exercice 111

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$
2. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}$
3. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
4. $u_n = \frac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}$
5. $u_n = \frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$
6. $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$

Exercice 112

Montrer que

$$\ln(n!) \sim n \ln n.$$

(On pourra écrire $\ln(n!)$ sous forme d'une somme.)

Exercice 113

Montrer que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n).$$

Exercice 114

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Pour $\alpha < 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
2. Pour $\alpha = 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
3. Pour $\alpha > 1$, déterminer un équivalent de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 115

Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. (a) Démontrer que (u_n) converge vers une limite l et préciser un encadrement de l.
   (b) Déterminer ensuite la valeur de l.
2. (a) Écrire une fonction Python qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n.
   (b) En déduire un programme, rédigé en Python, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle $0 < 1 - u_n < 10^3$.
3. On définit maintenant la suite (v_n) par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'expression $\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1})$.
   (b) Pour tout entier naturel k, exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.
   (c) Montrer alors que la série $\sum v_n^2$ est convergente et donner la valeur de sa somme.

15 Intégration

15.1 Intégration sur un segment

Exercice 116

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto (t^2+1)e^t$, puis celle qui s'annule en 0.

Exercice 117

Calculer, avec un changement de variable, les intégrales

$$(i) \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{3t-1}, \quad (u = 3t-1), \quad (ii) \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t, \quad (u = 1-\sqrt{t})),$$

$$(iii) \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x, \quad (u = 1+e^x), \quad (iv) \int_1^A \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t, \quad (u = \ln(t)).$$

Exercice 118

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est impaire. Soit $A > 0$. Via le changement de variable $t = -x$, montrer que

$$\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Exercice 119

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est paire. Soit $A > 0$. Via le changement de variable $t = -x$, montrer que

$$\int_{-A}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^A f(x)\mathrm{d}x.$$

En déduire que

$$\int_{-A}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^A f(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 120

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n \mathrm{d}t = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 121

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\mathrm{d}x$$

1. (a) Calculer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$.
   (b) Calculer I_0.
2. (a) Montrer que $I_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Établir que la suite (I_n) est décroissante.
   (c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
3. (a) Justifier l'égalité : $x^n \ln(1+x) \leqslant x^n$ pour tout $x \in [0,1]$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathrm{N}$ $\quad I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$
4. (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathrm{N} \qquad I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

   (b) Montrer que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+2}$$

   et en déduire un encadrement de I_n.
   (c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} nI_n$

Exercice 122

Soit $x \in [0;1[$ fixé.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathrm{N}^*$,

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t = 0.$$
3. Conclure.

Exercice 123

1. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n\mathrm{d}t = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = 0$$
2. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers un réel $f(x)$ (on dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement* vers f). A-t-on toujours $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_O^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$?
Indication : on pourra considérer la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $n \geqslant 1$ par
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ 2n - 2n^2 x \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0 \text{ si } \frac{1}{n} \leqslant x \end{cases}.$$

Exercice 124

À l'aide d'intégrations par parties, déterminer une primitive de $x \longmapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^e \ln x = \mathrm{d}x$.

15.2 Intégrales impropres

Exercice 125

On pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est une intégrale convergente.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n.$$

3. On donne $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Déterminer une expression de I_n en fonction de n (on pourra distinguer les cas n pair et n impair).

Exercice 126

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t+1} \mathrm{d}t.$ (ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}.$ (iii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-1/3} \mathrm{d}t.$

Exercice 127

Montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} \mathrm{d}t\,;$ (ii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} \mathrm{d}t\,;$ (iii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2} \mathrm{d}t.$

Exercice 128

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} [2, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^4+x^2+1} - x\sqrt[3]{x^3+ax} \end{array}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $f(x)$ en $+\infty$. On rappelle que

pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$$(1+h)^{\alpha} \underset{h\to 0}{=} 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}h^2 + o(h^2).$$

2. Pour quelle valeur de a l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge-t-elle ?

Exercice 129

Déterminer la nature des intégrales suivantes. Les calculer en cas de convergence.

$$(i)\ \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x2/5}}{5}\mathrm{d}x, \qquad (ii)\ \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}, \qquad (iii)\ \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t-1}}.$$

Exercice 130

On considère un entier naturel n.

1. (a) Justifier que l'on a : $\displaystyle\frac{(\ln(t))^n}{t^3} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
   (b) En déduire la convergence de l'intégrale $I_n := \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(t))^n}{t^3}\mathrm{d}t$.
2. (a) Calculer I_0.
   (b) Trouver une relation entrer I_{n+1} et I_n.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\frac{n!}{2^{n+1}}$.

16 Équations différentielles

16.1 EDOs linéaires d'ordre 1 et 2

Exercice 131

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

(*i*) $y'' - 4y = 0$ (*ii*) $y'' - 2y' + y = 0$ (*iii*) $2y'' - 8y' - 3y = 0$

Exercice 132

Résoudre les problèmes de Cauchy suivant :

(*i*)
$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

(*ii*)
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

(*iii*)
$$\begin{cases} y'' - 2y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

Exercice 133

On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y' = 2y + e^t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Vérifier que la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto -e^t$ est une solution particulière de l'équation différentielle.
3. Conclure.

16.2 Systèmes différentiels linéaires

Exercice 134

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

1. (a) Déterminer une matrice A telle que le système soit équivalent à $X'(t) = AX(t)$. Déterminer le spectre de A.
   (b) Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. (a) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) Prouver que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire T que l'on explicitera.
3. On note $Y = P^{-1}X$.
   (a) En notant $Y = \begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$, prouver que $Y' = P^-1X'$.
   (b) En déduire que $X' = AX \iff Y' = TY$.
4. (a) Résoudre l'équation différentielle $v' = 2v$.
   (b) En déduire les solutions du système $Y' = TY$.
   (c) Conclure.

Exercice 135

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

1. (a) Déterminer une matrice A telle que le système soit équivalent à $X'(t) = AX(t)$. Déterminer le spectre de A.
   (b) Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. (a) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) Prouver que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire T que l'on explicitera.
3. On note $Y = P^{-1}X$.
   (a) En notant $Y = \begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$, prouver que $Y' = P^-1X'$.
   (b) En déduire que $X' = AX \iff Y' = TY$.
4. (a) Résoudre l'équation différentielle $v' = 2v$.
   (b) En déduire les solutions du système $Y' = TY$.
   (c) Conclure.

Exercice 136

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

1. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Expliciter une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$.
2. Montrer que $X^3 - 3X^2 + 2X = 0$. En déduire le spectre de A.
3. Diagonaliser A.
4. En déduire les solutions du système différentiel.

Exercice 137

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 4x + 6y \\ y' = -3x - 5y \\ z' = -3x - 6y - 5z \end{cases}$$

1. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Expliciter une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$.
2. Montrer que $A^3 + 6A^2 + 3A - 10I = 0$. En déduire le spectre de A. On pourra remarquer que -5 est une racine du polynôme $X^3 + 6X^2 + 3X - 10$.
3. Diagonaliser A.
4. En déduire les solutions du système différentiel.

Exercice 138

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + 5z \\ y' = 2x + 2y - z \\ z' = 3x + 3z \end{cases}$$

1. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Expliciter une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$.
2. Montrer que $A^3 - 6A^2 - 4A + 24I = 0$. En déduire le spectre de A. On pourra remarquer que 6 est une racine du polynôme $X^3 - 6X^2 - 4X + 24$.
3. Diagonaliser A.
4. En déduire les solutions du système différentiel.

Exercice 139

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 2y - z \\ y' = 3x - 2y \\ z' = -2x + 2y + z \end{cases}$$

1. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Expliciter une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$.
2. Montrer que $A^3 + A^2 - 10A + 8I = 0$. En déduire le spectre de A. On pourra remarquer que -4 est une racine du polynôme $X^3 + X^2 - 10X + 8$.
3. Diagonaliser A.
4. En déduire les solutions du système différentiel.

17 Fonctions de deux variables rêelles, extrema

Exercice 140

1. Rappeler l'énoncé du théorème de Schwarz pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.
2. On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

   (a) En utilisant le fait que $|x|, |y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$, montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

   (c) Calculer, si elles existent, les dérivées partielles d'ordre 2 $\partial_{1,2}f(0,0)$ et $\partial_{2,1}f(0,0)$.

   (d) f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 141

On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & e^{x-y}(x^2-2y^2). \end{array}$$

Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.
Indication : on pourra se rappeler que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a pour spectre $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ alors $\operatorname{Tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det A = \lambda_1\lambda_2$.

Exercice 142

On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (x-1)^2+2y^2. \end{array}$$

Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.
Indication : on pourra se rappeler que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a pour spectre $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ alors $\operatorname{Tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det A = \lambda_1\lambda_2$.

Exercice 143

On pose

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x^3 - 6xy + 3y^2. \end{array}$$

Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.
Indication : on pourra se rappeler que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a pour spectre $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ alors $\operatorname{Tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det A = \lambda_1 \lambda_2$.

Exercice 144

On pose

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + y^3 e^x. \end{array}$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer le gradient de f.
3. Déterminer l'unique point critique de f, en déduire un éventuel extremum.
4. Calculer la Hessienne de f, ainsi que ses valeurs propres. Peut-on conclure quand à la nature du point critique ?
5. Montrer que le point critique n'est en réalité pas un extremum local.
   Indication : considérer $t \longmapsto f(0,t)$.

Exercice 145

On pose

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & ye^x + xe^y. \end{array}$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer le gradient et la hessienne de f en tout point.
3. Montrer que $(x_c, y_c) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} y_c e^{x_c} + e^{y_c} = 0 \\ x_c y_c = 1. \end{cases}$$

4. Soit (x_c, y_c) un point critique de f.
   (a) Montrer que $x_c, y_c < 0$.
   (b) On pose $g : t \in \mathbb{R}_-^* \longmapsto t + e^{t-1/t}$. Dresser le tableau de variation de g.

(c) Montrer que l'équation $g(t) = 0$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}_-^*$ admet une unique solution.

(d) Montrer que f admet un unique point critique. Quel est-il ?

5. Déterminer la nature de ce point critique.

Exercice 146

On pose

$$\left| \begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & y(x^2 + (\ln y)^2). \end{array} \right.$$

Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.

Exercice 147

On pose

$$\left| \begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x^4 y + xy. \end{array} \right.$$

Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.